ՀՏԴ 37.02

Հավասարակշռության պայմանների կիրառումը որպես երկրաչափական պնդումների ապացուցման այլընտրանքային միջոց*

Վարդան Մանուկյան
Գագիկ Նիկողոսյան

DOI: https://di.org/ 10.58726/27382923-ne2024.1-137

Հանգուցային բառեր. *մեխանիկա, մաթեմատիկա, միջառարկայական կապեր, աքսիոմ, թեորեմ, խնդիր, ուսուցում*

Նախաբան

Հիմնավորումներն ու ապացույցներն ունեն առանցքային նշանակություն ինչպես մաթեմատիկայում, այնպես էլ բնագիտական առարկաներում: Չնայած որ ֆիզիկան փորձարարական բնական գիտություն է, այնուամենայնիվ այն մաթեմատիկային ամենից մոտ գիտությունն է: Ավելին. ապացուցողական ապարատի առանձնահատկություններով և մեթոդներով ֆիզիկան նույնպես մոտ է մաթեմատիկային: Մաթեմատիկայի բաժիններից էլ ֆիզիկային ամենամոտը կարելի է համարել երկրաչափությունը, և սպասելի է, որ միջգիտական խորը կապերի առկայությունը պետք է իր ազդեցությունն ունենա ֆիզիկայի և երկրաչափության դասավանդման ձևերի վրա: Նշված դրսևորումները ժամանակին արժանացել են մասնագետների ուշադրությանը, և ներկայումս դրանց ակտուալությունը պայմանավորված է իրենց ՍԹԵՄ բնույթով:

Սույն աշխատանքում, նպատակ ունենալով լուսաբանել ֆիզիկայի և երկրաչափության խորը կապերը, ներկայացված են երկրաչափական պնդումների հիմնավորումներ՝ ստատիկայի գաղափարների կիրառմամբ: Դասակարգված են երկրաչափական պնդումների ֆիզիկական հիմնավորումների տարատեսակները, ինչն էլ աշխատանքի հիմնական գիտամեթոդական նորույթն է:

Աշխատանքի առաջին մասում ներկայացված են ֆիզիկայի և երկրաչափության միջգիտական կապերն ու դրանց առանձնահատկությունները: Ցույց է տրված այդ գիտությունների փոխադարձ ազդեցությունները դրանց ձևավորման և զարգացման ընթացքում: Հաջորդ բաժնում ներկա-

* *Հետազոտությունն իրականացվել է ՇՊՀ-ի կողմից տրամադրվող ֆինանսական աջակցության շնորհիվ՝ SUSh-PRIOR N01-SCI-2024 ծածկագրով գիտական թեմայի շրջանակներում:*

յացված են երկրաչափության մեջ ֆիզիկայի ապացուցողական բնույթի կիրառությունների օրինակներ և արված է դրանց դասակարգում: Առաջին դասին պատկանող հիմնավորումներում ֆիզիկական գործիքակազմը արդեն իսկ պարունակում է հիմնավորելու ենթակա երկրաչափական պնդումը: Երկրորդ դասին պատկանում են ինտուիտիվ բնույթ կրող ֆիզիկական դատողությունների օգնությամբ հիմնավորվող երկրաչափական պնդումները: Երրորդ դասին պատկանում են այն հիմնավորումները, որոնց հիմքում երկրաչափական աքսիոմատիկայի փոխարեն դրված են ֆիզիկական օրենքներ կամ հիպոթեզներ: Նշված երեքի մեջ վերջինի ապացուցողական հիմքերը ամենախիստն ու անկախն են: Աշխատանքի վերջին բաժնում դիտարկված են երկրաչափական պնդումների ապացույցներ՝ հենված մարմինների հավասարակշռության պայմանների կիրառման վրա: Ներկայացված են քննարկված մոտեցումների կիրառությունների հնարավորությունը ՍԹԵՄ ուսուցման համատեքստում:

Ֆիզիկայի և երկրաչափության միջգիտական կապերի մասին

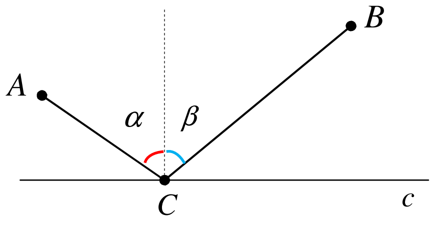
Մաթեմատիկան (մասնավորապես երկրաչափությունը) ճշգրիտ աքսիոմատիկ գիտություն է: Հանրակրթական դպրոցում ուսումնասիրում են էվկլիդեսյան երկրաչափությունը, որն ունի 5 աքսիոմներից կազմված աքսիոմատիկ հիմք և մնացած ցանկացած պնդում անհրաժեշտ է ապացուցել կամ նշված աքսիոմների ուղիղ կիրառման ճանապարհով և կամ էլ դրանց օգնությամբ արդեն ապացուցված այլ պնդումների (թեորեմներ, լեմմաներ, հատկություններ և այլն) օգնությամբ: Երկրաչափական աքսիոմներն ունեն էմպիրիկ բնույթ, և մեծ հաշվով փորձն է հուշում, թելադրում և ցույց տալիս դրանց իրավացի լինելը: Այս իմաստով երկրաչափությունն ու ֆիզիկան ունեն խորքային ընդհանրություններ, և զարմանալի չէ, որ շատ հետազոտողներ երկրաչափությունը համարում են ֆիզիկայի բաժին: Ավելին, կառուցված, մշակված և իրենց կիրառելիության սահմաններում ճշգրիտ աշխատող հիմնարար ֆիզիկական տեսությունները նույնպես կարելի է շարադրել աքսիոմատիկ եղանակով: Օրինակ՝ Ջոն ֆոն Նեյմանը քվանտային մեխանիկան շարադրեց որպես աքսիոմատիկ գիտություն:

Պատմականորեն սկզբից ստեղծվել և կիրառվել է էվկլիդեսյան երկրաչափությունը, որն իր ծնունդով պարտական է մի կողմից մարդկային առօրեական պահանջների, իսկ մյուս կողմից՝ հետաքրքրությունների բավարարմանը և հենված է եղել անտիկ մարդու կենսափորձի վրա: Դարեր շարունակ համարվել է, որ էվկլիդեսյան երկրաչափությունը միակ ճշմարիտ երկրաչափական տեսությունն է ու պետք է մտածել միայն դրա կիրառությունների հետագա զարգացման մասին, և իմաստ չունի խորհել դրա աքսիոմատիկ հիմքերի հիմնավորումների մասին: Չնայած որ պրակտիկ կիրառություններում էվկլիդեսյան երկրաչափությունը իդեալական ճշտությամբ աշխատում էր, որոշ մաթեմատիկոսների մոտ առաջացան կասկածներ առ այն, որ անհակասական երկրաչափական համակարգ կարելի է կառուցել նաև ուրիշ աքսիոմատիկ համակարգի հիմքով: Գնդային մակերևույթի և հարթության երկրաչափությունների տարբերությունների մասին մտորումները ստիպեցին մեծ մաթեմատիկոս Կառլ Ֆրիդրիխ Գաուսին փորձնական ճանապարհով ստուգելու էվկլիդեսյան երկրաչափության աքսիոմները: Նա ընտրեց երեք լեռնագագաթ՝ Հոգեն-Հագեն, Ինսելսբերգ և Բրոկեն և այն ժամանակվա անկյունաչափական գործիքներին հասանելի ողջ ճշգրտությամբ չափեց այդ գագաթները միացնող կողմերի կազմած անկյունները: Մի քանի անգամ կրկնելով չափումները՝ Գաուսը եռանկյան անկյունների գումարի համար 180 աստիճանից որևէ շեղում չգրանցեց: Ներկայումս պարզ է, որ երկրամերձ գրավիտացիան չափազանց թույլ է կորացնում տարածությունը, որն անհնար էր գրանցել տվյալ ժամանակի սարքերի միջոցով (և ներկայիս սարքերի միջոցով նույնպես): Փորձնական փաստերի բացակայությունը, սակայն, չընկճեց մաթեմատիկոսներին, և նրանց համարձակ գաղափարների և համառ ջանքերի շնորհիվ ստեղծվեցին ոչ էվկլիդեսյան երկրաչափություններ: Դրանցից հատկապես հայտնիները Լոբաչևսկու և Ռիմանի երկրաչափություններն են: Տարիներ անց Ալբերտ Այնշթայնը իր հարաբերականության ընդհանուր տեսության ձևակերպումը իրականացրեց Ռիմանի երկրաչափության կիրառմամբ: Այս տեսության ստեղծումով ֆիզիկան կարծես միավորվեց երկրաչափությանը, և պարզաբանվեց, որ Տիեզերքի երկրաչափական հատկությունները կախված են մատերիայի բաշխումից: Նյութն ու էներգիան կորացնում են տարածությունը և դրանով «թելադրում նրա երկրաչափությունը»: Ռոջեր Փենրոուզի և Սթիվեն Հոքինգի աշխատանքների շնորհիվ հարաբերականության ընդհանուր տեսության հիմնարար գաղափարները ներկայացվեցին բոլորովին այլ լույսի ներքո, և տեսությունն ավելի երկրաչափականացավ: Վերջապես գրավիտացիայի տեսությանը նվիրված դասական եռահատորյակում Չարլզ Ուիլերի, Քիպ Թորնի և Ջոն Ուիլլերի կողմից ամրագրվեց երկրաչափադինամիկական մոտեցումը, համաձայն որի՝ ֆիզիկական մեծությունները ու դրանց կապող առնչությունները ամբողջությամբ կարելի է ներկայացնել երկրաչափական լեզվով: Այս նախագիծը հետագայում զարգացվեց, սակայն բախվեց լուրջ դժվարությունների և ի վերջո չիրականացավ: Դժվար է ասել, թե ժամանակի ընթացքում ինչպիսի հաջողություններ կգրանցի կամ չի գրանցի ֆիզիկան ամբողջությամբ երկրաչափություն «դարձնելու» երկրաչափադինամիկական միտումը, սակայն մի բան հաստատ է, որ երկրաչափության և ֆիզիկայի կապերը խորն են ու փոխներգործուն:

Մաթեմատիկական պնդումների հիմնավորումը ֆիզիկական գաղափարների օգնությամբ

Վերադարձի ճանապարհ, կամ ոչ այնքան ապացույց: Պարզվում է, որ ուսուցման տարրական մակարդակում նույնպես կարելի է մաթեմատիկան և հատկապես երկրաչափությունը «մոտեցնել և միավորել» ֆիզիկային, կամ ֆիզիկան՝ երկրաչափությանը: Խոսքը չի վերաբերում ստանդարտ միջառարկայական կապերին, այլ առավել հետաքրքիր, անսպասելի ու խորքային երևույթներին, երբ մաթեմատիակական պնդումները ապացուցվում են մեխանիկայի կամ ֆիզիկայի մեկ այլ բաժնի իմացությունների օգնությամբ: Նման դեպքերում հաճախ A մաթեմատիակական պնդումը ապացուցելու համար օգտվում ենք ֆիզիկայում հայտնի B պնդումից, որի ապացուցման համար ժամանակին օգտվել ենք մաթեմատիկական բնույթի դատողություններից, և հնարավոր է նաև, հենց A պնդումից: Որպես օրինակ քննարկենք հետևյալ հայտնի խնդիրը.

Ուղղից դուրս՝ նրա միևնույն կողմում գտնվում են A և B կետերը (նկար 1): Ուղիղն ու նշված կետերը գտնվում են միևնույն հարթության մեջ: Որոշել ուղղին պատկանող այն C կետը, որի համար $AC+CB$ գումարն ընդունում է նվազագույն արժեք:

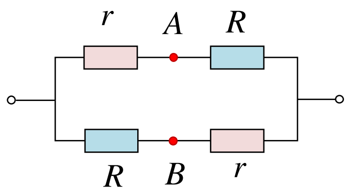


Նկար 1. ***α -ն և β -ն համապատասխանաբար AC և BC հատվածների կազմած անկյուններն են C կետում c ուղղին տարված ուղղահայացի նկատմամբ***

Խնդիրը կարելի է լուծել զուտ երկրաչափական մոտեցմամբ՝ լրացուցիչ կառուցման ճանապարհով: Կարելի է նաև ներմուծել C կետի դիրքը բնութագրող որևէ փոփոխական, $AC+CB$ գումարն արտահայտել այդ փոփոխականով և մաթեմատիկական անալիզի տարրական կիրառմամբ լուծել ֆունկցիայի նվազագույն արժեքի որոշման այս խնդիրը: Լուծման արդյունքում ստացվում է, որ հատվածների երկարությունների նվազագույն գումար կստացվի, երբ $\angle\alpha = \angle\beta$ (նկար 1): Վերջապես խնդիրը կարելի է լուծել ֆիզիկական գաղափարների կիրառման օգնությամբ: Պատկերացնենք հարթ հայելի, որի վրա գտնվում է մեր դիտարկած ուղիղը: Թող հայելու մակերևույթը ուղղահայաց լինի ուղղով և A ու B կետերով անցնող հարթությանը: Դիտարկենք լուսային ճառագայթ, որը, դուրս գալով A կետից, անդրադառնում է հայելու վրա և տարածվում դեպի B կետ: Համաձայն Ֆերմայի սկզբունքի՝ այդ ընթացքում լույսը ծախսում է նվազագույն ժամանակ, և օպտիկապես համասեռ միջավայրի դիտարկման պարագայում այն նաև անցնում է նվազագույն ճանապարհ: Վերջինս արտահայտում է մեր խնդրի պահանջն առ այն, որ $AC+CB$-ն պետք է ընդունի փոքրագույն արժեք: Մյուս կողմից, լույսի անդրադարձման օրենքից հայտնի է, որ C կետից անդրադարձման համար տեղի ունի $\angle\alpha = \angle\beta$ պայմանը, ինչն էլ անհրաժեշտ էր ստանալ: Փաստորեն օգտվելով լույսի անդրադարձման օրենքից և Ֆերմայի սկզբունքից՝ մենք լուծեցինք ներկայացված երկրաչափական խնդիրը: Սակայն հարկ է նշել, որ երբ ֆիզիկայում լույսի անդրադարձման օրենքը ստանում են Ֆերմայի սկզբունքից, կիրառում են ճիշտ նույն մաթեմատիկական միջոցները, որոնցից մենք «խուսափեցինք» մեր խնդրի ֆիզիկական մոտեցմամբ լուծման ընթացքում: Այլ կերպ ասած՝ ֆիզիկայում որոշ օրինաչափությունների ու պնդումների հանգում ենք բացի զուտ ֆիզիկական օրենքների և դատողությունների, այլև մաթեմատիկական բնույթի պնդումների կիրառման արդյունքում: Արդյունքում ստացվածը, բացի ֆիզիկական բովանդակությունից, իր մեջ պարունակում է նաև որոշակի մաթեմատիկական իրողություն, որն անհրաժեշտության պարագայում կարելի է օգտագործել: Օրինակ՝ տարբեր պոտենցիալային ուժերով պայմանավորված պոտենցիալ էներգիաների արտահայտությունները ընդհանուր դեպքում ստացվում են այդ ուժերի կատարած աշխատանքը բնութագրող կորագիծ ինտեգրալների հաշվման ճանապարհով: Եվ հետո, երբ արդեն պատրաստի տեսքով ունենք պոտենցիալ էներգիաների այդ արտահայտությունները, կարելի է մաթեմատիկական անալիզի դասընթացում քննարկվող տարբեր ինտեգրալներ ներկայացնել որպես տարբեր իրավիճակներում հայտնի պոտենցիալային ուժերի կատարած աշխատանք և հեշտությամբ հաշվել դրանք [7, 109-114]:

Ինտուիտիվ բնույթի ֆիզիկական պնդումների կիրառում: Վերը քննարկված դեպքերի դիտարկումը կարող է նպաստել միջառարկայական կապերի ամրացմանը, սակայն չպետք է մոռանալ, որ բոլոր նման դեպքերում ֆիզիկան ընդամենը մաթեմատիկային է տրամադրում ճիշտ այն նույն տեղեկույթը, հնարքներն ու միջոցները, որոնք նա վերցրել էր մաթեմատիկայից իր ձևավորման և զարգացման ընթացքում: Նման դեպքերում մաթեմատիկական պնդումների հիմնավորումները ֆիզիկական մոտեցումների միջոցով թեկուզ և հետաքրքիր են ու օգտակար, սակայն, խիստ ասած, չունեն ապացուցողական բնույթ: Առավել արժեքավոր են այն դեպքերը, երբ մաթեմատիկական պնդման ֆիզիկական ապացույցները հենված են բոլորովին այլ անկախ հիմքերի վրա: Երբեմն այդ հիմքերը ինտուիտիվ բնույթ կրող ֆիզիկական պնդումներ են: Վերջիններս նույնպես չեն կարող համարվել խիստ մաթեմատիկական ապացույցներ, սակայն կարևոր են միջառարկայական կապերի վերհանման տեսակետից: Նշենք նաև, որ ուսուցման գործընթացում ցանկալի է խրախուսել սովորողների մոտ ինտուիտիվ բնույթի վարկածների առաջարկման համարձակությունը՝ չմոռանալով, իհարկե, դրանց հետագա հիմնավորումների անհրաժեշտության մասին: Գիտության մեջ նույնպես բազմաթիվ կարևոր գաղափարներ սկզբում առաջադրվել են ինտուիտիվ մակարդակով, որոնք հետագայում նոր միայն ստացել են իրենց խիստ հիմնավորումները: Օրինակ, Օլիվեր Հեվիսայդն իր կողմից մշակած օպերատորական հաշվի կիրառմամբ տասնիններորդ դարի վերջերին լուծել է էլեկտրական լարերում տատանումների տարածման կիրառական կարևորություն ունեցող մի շարք խնդիրներ այն դեպքում, երբ օպերատորական հաշիվը դեռ չէր ստացել իր պատշաճ մաթեմատիկական հիմնավորումը: Ի պատասխան այդ կապակցությամբ ժամանակի մաթեմատիկոսների հանդիմանանքներին՝ Հեվիսայդը մի անգամ արտահայտվել է. «Կարո՞ղ եմ արդյոք հրաժարվել ճաշից, քանի որ լիովին չեմ հասկանում մարսողության գործընթացը»: Տարիներ շարունակ օպերատորական հաշիվը ունեցավ իր օգտակար կիրառությունները, և միայն քսաներորդ դարի կեսերին մաթեմատիկոսների ջանքերի շնորհիվ այն ստացավ իր հիմնավորումը՝ պատշաճ մաթեմատիկական խստությամբ:

Այժմ անդրադառնանք ուսուցման գործընթացում ինտուիտիվ պնդումների կիրառմանը: Ներկայացնենք միջին թվաբանականի ու միջին ներդաշնակի միջև հայտնի անհավասարության մի հիմնավորում, որը հիմնված է ինտուիտիվ մակարդակով արված ֆիզիկական մեկ գաղափարի կիրառման վրա [7, 78-79; 8, 275]: Դիտարկենք r և R դիմադրություններով ռեզիստորներից կազմված նկար 2-ում պատկերված միացումը: Ֆիզիկական տեսակետից պարզ է, որ շղթայում արված կարճ միացումները չեն կարող մեծացնել շղթայի դիմադրությունը (*ինտուիտիվ մակարդակով արված պնդում*): Ուստի, եթե A և B կետերը միացնենք կարճ միացմամբ, ապա ստացված $\frac{2rR}{r+R}$ դիմադրությունը չի կարող մեծ լինել մինչ միացումը դրա ընդունած $\frac{r+R}{2}$ արժեքից: Վերջինս փաստորեն հիմնավորում է հայտնի $\frac{2rR}{r+R} \leq \frac{r+R}{2}$ անհավասարությունը: Այս անհավասարության ապացուցման տարբեր մաթեմատիկական միջոցներ կան, սակայն դրանց մեջ ամենապատկերավորն ու գեղեցիկը հավանաբար հին հույն մաթեմատիկոս Պապպոս Ալեքսանդրացու կողմից բերված հայտնի երկրաչափական ապացույցն է: Այս իմաստով միջինների հայտնի կապը կարելի է համարել նաև երկրաչափական պնդում:

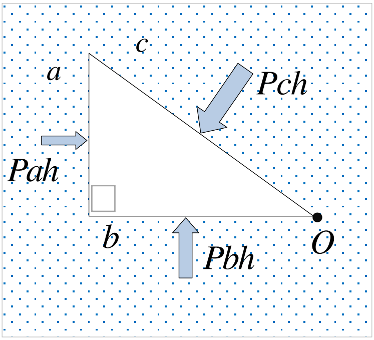


Նկար 2.** A **և** B **կետերի միացման արդյունքում տեղամասը երկու միատեսակ ռեզիստորների զուգահեռ միացումից վերածվում է հավասար դիմադրություններով տեղամասերի հաջորդական միացման

Հիմնավորում՝ ֆիզիկական կանխադրույթների և օրենքների օգնությամբ: Մի շարք կարևոր երկրաչափական պնդումներ կարելի է ապացուցել մեխանիկայի էմպիրիկ կամ աքսիոմատիկ բնույթի պնդումների, ինչպես նաև լրացուցիչ պարզագույն մաթեմատիկական միջոցների օգնությամբ: Խոսքը վերաբերում է ստատիկայի աքսիոմներին, պահպանման օրենքներին, եռանկյունների նմանության հայտանիշներին և այլն: Համակողմանի վերլուծության արդյունքում պարզվել է, որ երկրաչափական բնույթի պնդումների նման ֆիզիկական հիմնավորումները հենված են ամուր հիմքերի վրա և կարող են համարվել ապացույցներ [3, 54-55]: Ստորև կներկայացնենք դրանք՝ շեշտադրելով ստատիկայի կիրառությունները երկրաչափական ապացույցներում:

Որոշ երկրաչափական պնդումների ապացույցը մարմինների հավասարակշռության պայմանների կիրառմամբ

Երկրաչափական պնդումների ապացույցները՝ հենված զանազան մեխանիկական մոտեցումների վրա, այնքան հին են, որքան երկրաչափությունն ու մեխանիկան: Նման մոտեցումներ սկսել են ձևավորվել դեռևս հին հույների մոտ: Օրինակ՝ Արքիմեդը, օգտվելով հավասարակշռության պայմաններից, որոշել է պարաբոլական սեգմենտի մակերեսը և ապացուցել է, որ կամայական եռանկյան միջնագծերը հատվում են մի կետում: Ուսուցման գործընթացում մեխանիկայի կիրառմամբ երկրաչափական խնդիրների լուծման վերաբերյալ համակարգված ու մշակված մոտեցումներ ձևավորվել են խորհրդային ֆիզիկոս մանկավարժների աշխատանքներում [3; 4]: Այդ ուղղությամբ նշանակալի աշխատանքներ կան արված նաև մաթեմատիկոս մանկավարժների կողմից, որոնցում կիրառելով զանգվածների կենտրոնի բանաձևը՝ լուծվում են բազմաթիվ երկրաչափական խնդիրներ [2]: Օգտվելով նման մոտեցումներից՝ տարբեր կառուցվածքի ու կազմության մեխանիկական համախմբերի հավասարակշռության պայմանների քննարկման ճանապարհով ապացուցված են Պյութագորասի թեորեմը, սինուսների և կոսինուսների թեորեմները, եռանկյունների անկյան կիսորդների, բարձրությունների և միջնագծերի թեորեմները, Չևայի թեորեմը, շրջանագծի երկու հատվող լարերի մասին թեորեմը և այլն: Նշված մոտեցումներում իդեալականացված երկրաչափական օբյեկտները (կետ, ուղիղ, հարթություն,…) փոխարինվում են նույնպես իդեալականացված, սակայն ֆիզիկական օբյեկտներով (նյութական կետ, հաստություն չունեցող, բայց զանգված ունեցող թել կամ ձող, կետում կիրառված ուժ և այլն): Բնականաբար, փոխելով օբյեկտները, պետք է փոխենք նաև դրանց վերաբերող աքսիոմատիկան, և երկրաչափական աքսիոմների փոխարեն պետք է կիրառել մեխանիկայի օրենքներ կամ կանխադրույթներ: Դրանցից են, օրինակ, ուժերի գումարման և ուժերի բաղադրիչների վերլուծման ստատիկայի աքսիոմները, մարմինների հավասարակշռության պայմանները և լրիվ մեխանիկական էներգիայի պահպանման օրենքը: Պարզ է, որ վերջիններս չեն բխում երկրաչափության աքսիոմներից և, հետևապես, երկրաչափական պնդումների հիմնավորման համար հանդիսանում են անկախ ապացուցողական հիմք: Օրինակ՝ օգտվելով [3, 18]-ում ցուցաբերած մոտեցմանը համանման մոտեցումից՝ ապացուցենք Պյութագորասի թեորեմը: Ի տարբերություն նշված գրքի՝ գազ պարունակող բալոնի փոխարեն դիտարկենք նույն տեսքի մարմին, որը շրջապատված է գազով (նկար 3): Պարզ է, որ արտաքին ճնշման ուժերի ազդեցության տակ պրիզման գտնվում է հավասարակշռության վիճակում: Հակառակ դեպքում, եթե այն ինչ-որ ձևով շարժվեր, կունենայինք հավերժական մեխանիկական շարժիչ: *O* առանցքի նկատմամբ դիտարկելով պրիզմայի նիստերի վրա ազդող ճնշման ուժերի գործադրած մոմենտների հավասարակշռության պայմանը՝ $Pah\frac{a}{2}+Pbh\frac{b}{2}=Pch\frac{c}{2}$, ստանում ենք Պյութագորասի թեորեմը՝ $a^2+b^2=c^2$:



Նկար 3.** h **բարձրությամբ ուղիղ պրիզման, որի հիմքը** a **և** b **էջերով ու** c **ներքնաձիգով ուղղանկյուն եռանկյուն է, գտնվում է գազում, որի ճնշումը** P **է:** O **առանցքի նկատմամբ պրիզմայի նիստերի վրա ազդող ճնշման ուժերի բազուկները** $a/2, b/2, c/2$ **են

Նշենք, որ Պյութագորասի թեորեմի համանման ապացույց, սակայն հիդրոստատիկ ճնշման ուժերի մոմենտների հավասարակշռության քննարկման օգնությամբ, դիտարկված է [7, 9-11]-ում: Ինչպես տեսնում ենք, բոլոր նմանօրինակ ապացույցները հիմնված են հավերժական շարժիչ ստեղծելու անհնարինությունը փաստող պոստուլատի և հավասարակշռության պայմանների կիրառման վրա, որոնք իրենց հիմնավորման համար չեն պահանջում Պյութագորասի թեորեմի կիրառում: Նույն հնարքի օգնությամբ կարելի է ապացուցել նաև այլ երկրաչափական պնդումներ: Օրինակ, եթե դիտարկենք գազում գտնվող ուղիղ եռանկյուն պրիզմա, ապա հեշտությամբ կարելի է ապացուցել, որ կամայական եռանկյան միջնուղղահայացները հատվում են մեկ կետում: Իրոք, քանի որ եռանկյան կողմերը զուգահեռ չեն, դրանցից կամայական երկուսի միջնուղղահայացները հատվում են մի կետում: Այդ կետով անցնող և պրիզմայի հիմքին ուղղահայաց առանցքի նկատմամբ նշված կողմերին համապատասխանող նիստերի վրա ազդող ճնշման ուժերի մոմենտները զրո են: Քանի որ պրիզման պետք է գտնվի հավասարակշռության վիճակում, երրորդ նիստի վրա ազդող ուժը նույնպես պետք է նշված առանցքի նկատմամբ մոմենտ չունենա, իսկ դա կլինի միայն այն դեպքում, երբ եռանկյան երրորդ կողմի միջնուղղահայացը անցնի առանցքով: Այստեղից էլ պարզ է, որ դիտարկված պրիզմայի հիմք հանդիսացող կամայական եռանկյան բոլոր միջնուղղահայացները հատվում են մեկ կետում, ինչն էլ պահանջվում էր ապացուցել:

Ուսուցման գործընթացում հավասարակշռության պայմանների կիրառմամբ երկրաչափականն պնդումների ապացուցման կոնկրետ կիրառություններ են ներկայացված [1, 208-224; 5, 234-237; 6, 1–8] աշխատանքներում: Մանկավարժական փորձը վեր է հանում սույն մոտեցման ինչպես ուժեղ, այնպես էլ թույլ կողմերը: Որպես ուժեղ կողմ կարելի է համարել պատկերավորությունը, երբ վերացական մաթեմատիկական օբյեկտները փոխարինվում են իդեալականացված, բայց ամեն դեպքում իրականությանն ավելի մոտ ֆիզիկական օբյեկտներով: Ֆիզիկական մոտեցման դեպքում մաթեմատիկական իրողությունը արտահայտվում է ֆիզիկական երևույթով, ինչը ավելի տպավորիչ է դարձնում երկրաչափական պնդումների հիմնավորման գործընթացը: Մաթեմատիկական առաջադրանքների կատարման համար ոչ մաթեմատիկական գաղափարների կիրառումը նախկինում համարում էին քննարկված մոտեցման թույլ կողմ՝ պատճառաբանելով, որ այն պահանջում է հավելյալ գիտելիքներ և հմտություններ ու լրացուցիչ ծանրաբեռնում սովորողին: Ներկայումս ամբողջ աշխարհում ակտիվորեն զարգանում և տարածվում է ՍԹԵՄ ուսուցումը, որի հիմքում դրված է երևույթները համակողմանի և ամբողջական կերպով դիտարկելու մոտեցումը: Համաձայն ՍԹԵՄ մոտեցման՝ կարևոր հարցերն ու խնդիրները պետք է դիտարկել գիտության ոչ մեկ ոլորտի համատեքստում: Այս պատճառով երկրաչափական և առհասարակ մաթեմատիկական պնդումների ֆիզիկական ապացուցման նկատմամբ հետաքրքրությունը կրկին աճել է, և հաշվի առնելով առկա հարուստ տեսական մշակումները՝ արդեն ստեղծվել են բոլոր անհրաժեշտ հիմքերը ուսուցման գործընթացում դրանց լիարժեք կիրառման համար:

Եզրակացություն

Արդի հասարակության պահանջով դպրոցը պետք է ձևավորի ճկուն մտածողություն և տոլերանտ հայացքներ կրող քաղաքացի: Անհրաժեշտ է պատրաստել աշխարհում տեղի ունեցող արագ փոփոխություններին պատրաստ շրջանավարտներ: Դեռ ավելին, նրանք պետք է իրականացնեն այդ փոփոխությունները: Այս պատճառով սովորողների ուսուցման ընթացքում պետք է զարգացվի իրերի էական ու ոչ էական կողմերը գանազանելու և երևույթները ամբողջության մեջ տեսնելու կարողություններ: Նրանք պետք է հասկանան, որ իրական խնդիրների մեծ մասը հնարավոր չէ լիարժեքորեն լուծել մեկ գիտության շրջանակում, և յուրաքանչյուր գիտություն արտահայտում է ամբողջի մի կողմը միայն: Միջառարկայական ինտեգրատիվ ուսուցումը կոչված է այդ տրամաբանության մեջ կրթության իրականացմանը: Սույն աշխատանքում դասակարգելով երկրաչափական պնդումների ֆիզիկական հիմնավորումները՝ ցույց են տրված դրանց բավականին լայն կիրառությունները, առանձնահատկություններն ու ապացուցողական հնարավորությունները: Երկրաչափության և ֆիզիկայի հիմնահարցերի համատեղ ուսուցումը կարևոր է կոնցեպտուալ տեսակետից և կարող է նպաստել դասավանդվող նյութի խորն ու համակողմանի ընկալմանը: Նման մոտեցումների զարգացումը՝ այլ առարկաների ներգրավմամբ հնարավորություն կստեղծի իրականացնել որակյալ ու ոչ ֆորմալ ՍԹԵՄ ուսուցում:

DOI: https://di.org/ 10.58726/27382923-ne2024.1-137

Գրականություն

1. Նիկողոսյան Գ.Ս., Ֆիզիկայի և երկրաչափության միջառարկայական կապերի որոշ դրսևորումների մասին, ՎՊՀ գիտական տեղեկագիր, «ՎԱՌՄ» ՍՊԸ, 2022, հ 1, էջ. 208-224:
2. Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс, Москва: «Наука», 1987. - 160 с.
3. Коган Б.Ю. Приложение механики в геометрии (серия «Популярные лекции по математике») Москва, «Наука», 1965, 57с.
4. Успенский В.А. Некоторые приложения механики в математике (серия «Популярные лекции по математике») Москва, «Наука», 1958, 50 с.
5. Цатурян А.М., Парсаданян С.М., Манукян В.Ф., Никогосян Г.С. О некоторых математических соотношениях, вытекающих из физических соображений, физика в школе и вузе. Международный сборник научных статей, выпуск 14, Санкт-Петербург 2012, 234-237 с.
6. Hanna, G., Jahnke, H.N. Another approach to proof: Arguments from Physics. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 34, 2002, 1-8 pp. https://doi.org/10.1007/BF02655687
7. Levi M. The Mathematical Mechanic, Using Physical Reasoning to Solve Problems, Princeton University Press, New Jersey 08540, 2009, 186 p.
8. Witkowski A. Proof Without Words: An Electrical Proof of the AM-HM Inequality, Mathematics Magazine, 2014, 275 p.

Применение условий равновесия как альтернативный способ доказательства геометрических утверждений

Вардан Манукян
Гагик Никогосян

Резюме

Ключевые слова: *механика, математика, междисциплинарные связи, аксиома, теорема, задача, обучение*

Статья посвящена механическим подходам к доказательству геометрических утверждений. В данной работе, с целью иллюстрации глубоких связей физики и геометрии, представлены обоснования геометрических утверждений с использованием идей статики. Даны классификации физических обоснований геометрических утверждений, что является основной научно-методической новизной работы.

В первой части работы представлены междисциплинарные связи физики и геометрии и их особенности. Показаны взаимные влияния этих наук в процессе их становления и развития. В следующем разделе представлены примеры доказательных приложений физики в геометрии и проведена их классификация. Инструментарий физических обоснований, принадлежащих к первому типу, в каком-то смысле уже содержит геометрическое утверждение, которое необходимо обосновать. Второй класс включает геометрические утверждения, подкрепленные интуитивными физическими рассуждениями. К третьему классу относятся рассуждения, которые вместо геометрической аксиоматики основаны на применении физических законов и гипотез. Среди трех упомянутых типов доказательная база последнего является наиболее строгой и независимой. В последнем разделе статьи рассмотрены доказательства геометрических утверждений, основанные на применении условий равновесия тел. Представлены возможности применения обсуждаемых подходов в контексте STEM-образования.

Application of Equilibrium Conditions as an Alternative Means of Proving Geometric Statements

Vardan Manukyan
Gagik Nikoghosyan

Summary

Key words: *mechanics, mathematics, interdisciplinary connections, axiom, theorem, problem, learning*

The article is devoted to mechanical approaches towards proving geometric statements. In this paper, in order to illustrate the deep connections between physics and geometry, the justifications for geometric statements, using the ideas of statics, is presented. Classifications of physical justifications for geometric statements are given, which is the main scientific and methodological novelty of the paper.

The first part of the work represents interdisciplinary connections between physics and geometry along with their features. In the process of their formation and development, the mutual influence of these sciences is shown. The next section presents examples of demonstrative applications of physics in geometry and their classification. The toolkit of physical justifications belonging to the first type, in a sense, already contains a geometric statement that needs to be justified. The second class includes geometric statements supported by the intuitive physical reasoning. The third class includes reasoning that, instead of geometric axiomatics, is based on the application of physical laws and hypotheses. Among the three types mentioned, the evidence, based on the latter, is the most rigorous and independent. The last section of the article discusses the proof of geometric statements based on the application of equilibrium conditions for bodies. The possibilities of applying the discussed approaches in the context of STEM education are presented.

Ներկայացվել է 29.03.2024 թ.
Գրախոսվել է 16.04.2024 թ.
Ընդունվել է տպագրության 30.05.2024 թ.